Differenzierungsstunde
im Fach Mathematik (Kl. 10)

Beispiele und Ansätze

Grundannahmen für die Durchführung der Differenzierungsstunde

- Unterricht von einer Lehrkraft oder zwei Lehrkräften (*Teamteaching*)
- Unterricht mit der ganzen Klasse (→ *Binnendifferenzierung*) oder in Teilgruppen (z. B. Leistungsgruppen → *äußere Differenzierung*)
- Themengleiche Arbeit für alle Schülerinnen und Schüler (SuS) einer Klasse
- Differenzierungsstunde sowohl zum Erarbeiten neuer Themen wie zum Üben

Ziele und Inhalte der Fortbildung

- Kennen von Typen zur Gestaltung von Differenzierungsstunden anhand von konkreten Beispielen
- Reflexion der Beispiele (insb. Frage der Übertragbarkeit auf andere Themen)
- Formulierung von Kriterien für die Gestaltung von Differenzierungsstunden

Kriterien für die Gestaltung von Differenzierungsstunden

- Klassenverband bleibt erhalten und wird für den Lernfortschritt genutzt (gemeinsamer Start; Integrationsphase nach Differenzierungsphase)
- Aufbau eines Spannungsbogens über die gesamte Stunde.
- Es werden Lernangebote auf verschiedenen Niveaustufen bereitgestellt.
- SuS finden ihr Niveau und erhalten dazu geeignete Hilfestellungen.
- SuS erhalten Rückmeldungen zu ihren Arbeitsergebnissen und Hinweise zu ihrer Optimierung.

Differenzierungsstunde Mathematik - Typen und Beispiele im Überblick

Typ	Kurzbeschreibung	Beispiele
Üben im Rahmen eines Kompetenzrasters	Von einer Ausgangsaufgabe zu – Übungen von Teilkompetenzen (Basis) oder – Erweiterungsaufgaben	Übungen zur Vektorgleichung einer Geraden
Erarbeiten mit Hilfe eines Schulbuches	Variation von Schulbuchbeispielen auf verschiedenen Niveaustufen	Nullstellen ganzrationaler Funktionen
Erstellen eines Produkts	– Übungsaufgabe Hinweisen und Musterlösung – Zuordnungsaufgabe – Erklär-Sequenz – Medien-Produkt	Bestimmung der Steigung eines Graphen in einem Punkt
Zwei Wege Konzept zur Erarbeitung eines Themas	Teilung der Lerngruppe in zwei Teilgruppen • Angeleitet durch Lehrkraft oder • Selbstständig mithilfe von Lernmaterial	Vektorgleichung einer Geraden
Planarbeit zur Erarbeitung eines Themas	drei Niveaustufen; Differenzierung über Umfang der Anleitung und das Aufgabenniveau	Formel von Bernoulli

Typ „Üben mit Kompetenzraster“

Ausgangsaufgabe:

10 Betrachtet wird die rote Gerade g in Fig. 1.

a) Gib drei verschiedene Gleichungen für die Gerade g an.

b) Bestimme die Koordinaten von drei verschiedenen Punkten A, B und C, die auf der Geraden g liegen.

c) Der Punkt P liegt auf der Geraden g und in der x_1x_2-Ebene. Bestimme die Koordinaten des Punktes P.

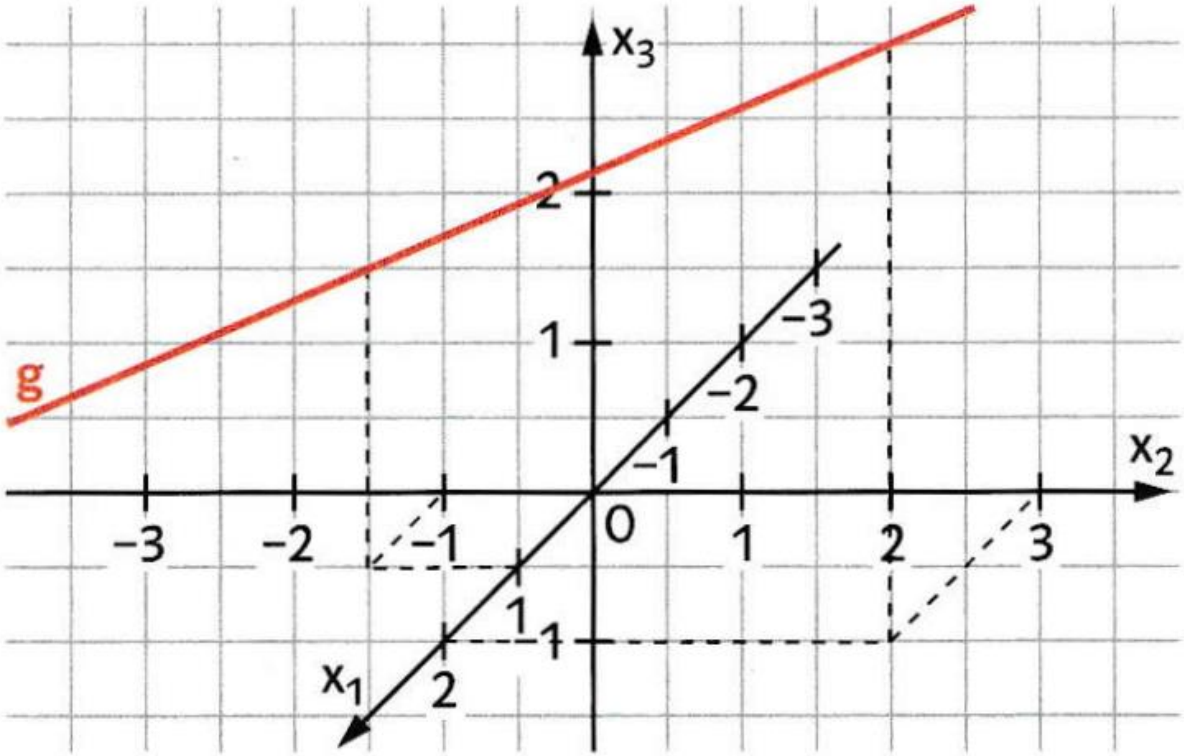


Fig. 1

Lambacher Schweizer 6, Mathematik für Gymnasien, Klett 2008

Typ „Üben mit Kompetenzraster"

Kompetenz	ja / nein	Trainingsaufgaben	Ausgangs-aufgabe	weiterführende Aufgaben
Ich kann (aus geeigneten Hilfs-linien) die Koordinaten eines Punktes im Koordinatensystem ablesen.		INFO: S. 74 Kasten	S. 91 Nr. 10	W1 oder W2 (S. 98 Nr. 10) oder W3 (S. 99 Nr. 18)
Ich weiß, wie die Gleichung einer Geraden aufgebaut ist.		INFO: S. 87 Kasten		
Ich kann die Gleichung einer Geraden durch zwei vorge-gebene Punkte aufstellen.		T1: S. 89/Nr. 1 b,c (INFO: S. 88 Beispiel 2)		
Ich kann Punkte bestimmen, die auf einer vorgegebenen Geraden liegen.		T2: S. 89/Nr. 4 a (INFO: S. 88 Beispiel 1)		
Ich kenne die besonderen Eigenschaften von Punkten auf Koordinatenachsen und Koordinatenebenen		T3: S. 76/Nr. 5 (INFO: S. 75 Beispiel 3)		

Typ „Erarbeiten durch Schulbuchvariation“

Idee: Das Schulbuch nutzen!

- Buch als Hilfsmittel zur selbstständigen Erarbeitung und Vertiefung von neuen Inhalten
- Gezielte Förderung der Lesekompetenz (→ Vorbereitung auf Kursstufe, Studium)
- Ansatz: Schulbuchbeispiele variieren und analysieren
- Ressourcen schonen (keine aufwändiges Vorbereiten von differenzierendem Material)

Typ „Erarbeiten durch Schulbuchvariation“

Beispiel: Nullstellen ganzrationaler Funktionen

<u>Arbeitsauftrag Niveau A:</u>

Verfahren zur Nullstellenbestimmung nachvollziehen und an **vorgegebenen Beispielen** anwenden.

- Schulbuchbeispiele werden nur durch „Wackeln an den Zahlen“ variiert:

(1) $f(x) = -2x^2 + x + 1$
(2) $g(x) = 4x^3 - x$
(3) $h(x) = 2x^4 - x^2 - 1$

Verwendetes Schulbuch: LS 10 (2016), S.

Eine Zahl x_1 heißt **Nullstelle** einer Funktion f, wenn $f(x_1) = 0$ gilt. Für manche ganzrationalen Funktionen gibt es Verfahren zur Berechnung von Nullstellen.

(1) $f(x) = ax^2 + bx + c$. Die Nullstellen erhält man mit der Lösungsformel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Fü $\boxed{f(x) = x^2 - 4x + 3}$ t sich $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1$, also $x_1 = 1$ und x_2

(2) Bei der Funktion $\boxed{g(x) = x^3 - 4x}$ $\cdot (x^2 - 4)$ kann man im Funktionsterm x ausklammern.
Ein **Nullprodukt** w an, indem man die Faktoren einzeln gleich null setzt.
Eine Lösung ist $x_1 = 0$. Weitere Lösungen sind $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$.

(3) Im Funktionsterm der Funktion h vom $\boxed{h(x) = x^4 - 11x^2 + 18}$ mmt die Variable x nur mit den Hochzahlen 2 bzw. 4 vor. **biquadratische Gleichung**.
Eine biquadratische Gleichung kann man auf eine quadratische Gleichung zurückführen.
– Man ersetzt x^2 durch eine neue Variable z. **Substitution:** $x^2 = z$ und $x^4 = z^2$.
Es ergibt sich $x^4 - 11x^2 + 18 = z^2 - 11z + 18$.
– Man löst die quadratische Gleichung $z^2 - 11z + 18 = 0$. Lösungen sind $z_1 = 2$ und $z_2 = 9$.
– Man bestimmt durch Rücksubstitution die Lösungen der biquadratischen Gleichung.
$z_1 = x^2 = 2$ ergibt $x_1 = \sqrt{2}$ und $x_2 = -\sqrt{2}$; $z_2 = x^2 = 9$ ergibt $x_3 = 3$ und $x_4 = -3$.

Beispiel: Nullstellen ganzrationaler Funktionen

<u>Arbeitsauftrag Niveau B:</u>

Verfahren zur Nullstellenbestimmung nachvollziehen und an **selbstgewählten Beispielen** anwenden.

Grenzen der Anwendbarkeit der Verfahren an Beispielen erläutern.

Substitutionsverfahren **verallgemeinern**.

Eine Zahl x_1 heißt **Nullstelle** einer Funktion f, wenn $f(x_1) = 0$ gilt. Für manche ganzrationalen Funktionen gibt es Verfahren zur Berechnung von Nullstellen.

(1) $f(x) = ax^2 + bx + c$. Die Nullstellen erhält man mit der Lösungsformel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
Für z. B. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ergibt sich $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1$, also $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.

(2) Bei der Funktion g mit $g(x) = x^3 - 4x = x \cdot (x^2 - 4)$ kann man im Funktionsterm x ausklammern.
Ein **Nullprodukt** wie $x \cdot (x^2 - 4) = 0$ löst man, indem man die Faktoren einzeln gleich null setzt.
Eine Lösung ist $x_1 = 0$. Weitere Lösungen sind $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$.

(3) Im Funktionsterm der Funktion h vom Grad vier mit $h(x) = x^4 - 11x^2 + 18$ kommt die Variable x nur mit den Hochzahlen 2 bzw. 4 vor. Die Gleichung $x^4 - 11x^2 + 3 = 0$ heißt **biquadratische Gleichung.**
Eine biquadratische Gleichung kann man auf eine quadratische Gleichung zurückführen.
- Man ersetzt x^2 durch eine neue Variable z. **Substitution:** $x^2 = z$ und $x^4 = z^2$.
  Es ergibt sich $x^4 - 11x^2 + 18 = z^2 - 11z + 18$.
- Man löst die quadratische Gleichung $z^2 - 11z + 18 = 0$. Lösungen sind $z_1 = 2$ und $z_2 = 9$.
- Man bestimmt durch Rücksubstitution die Lösungen der biquadratischen Gleichung.
  $z_1 = x^2 = 2$ ergibt $x_1 = \sqrt{2}$ und $x_2 = -\sqrt{2}$; $z_2 = x^2 = 9$ ergibt $x_3 = 3$ und $x_4 = -3$.

Typ „Erarbeiten durch Schulbuchvariation“

Beispiel: Nullstellen ganzrationaler Funktionen

<u>Arbeitsauftrag Niveau C:</u>

Ohne Anleitung Nullstellen der Funktion $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x$ bestimmen.

Vergleich des eigenen Vorgehens mit dem Schulbuch.

Ausloten von Möglichkeiten und Grenzen der Verfahren an Hand von Beispielen und Gegenbeispielen.

Ggf.: Recherche zur **Verallgemeinerung** der Lösungsformel für Gleichungen vom Grad n >2

Arbeitsblatt zu kubischen Gleichungen aus MNU 2016/3

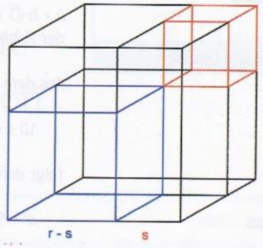
CARDANO und TARTAGLIA lösen kubische Gleichungen

1545 erscheint GIROLAMO CARDANOS *Ars magna*, eines der bedeutendsten Werke der Mathematikgeschichte. In diesem Buch wird erläutert, wie Gleichungen 3. und 4. Grades gelöst werden können. Für die Lösung der Gleichung $x^3 + 6x = 20$ verwendet CARDANO eine geometrische Methode, die 10 Jahre zuvor von NICOLO TARTAGLIA entwickelt worden war.

NICOLO TARTAGLIA

- Erläutern Sie die folgenden Schritte:

(1) Ein Würfel mit Kantenlänge r kann so zerlegt werden, dass zwei Würfel und drei zueinander kongruente Quader entstehen. Was hat dies mit der Beziehung $r^3 - s^3 = (r-s)^3 + 3 \cdot r \cdot s \cdot (r-s)$ zu tun?



GIROLAMO CARDANO

Zeichnungen

(2) Ersetzt man in der Gleichung $x^3 + 6x = 20$ die Variable x durch $r - s$, dann folgt: $3rs = 6$ und $r^3 - s^3 = 20$

(3) Hieraus folgt: $\left(\frac{2}{s}\right)^3 - s^3 = 20$ und $r^3 - \left(\frac{2}{r}\right)^3 = 20$

(4) Hieraus folgt: $s^6 + 20s^3 = 8$ und $r^6 - 20r^3 = 8$

(5) Mit $y = s^3$ und $z = r^3$ folgt: $y = -10 + \sqrt{108}$ und $z = 10 + \sqrt{108}$

(6) $x = r - s = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} - \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}}$ ist eine Lösung der kubischen Gleichung.

Typ „Erarbeiten durch Schulbuchvariation“

Beispiel: Nullstellen ganzrationaler Funktionen

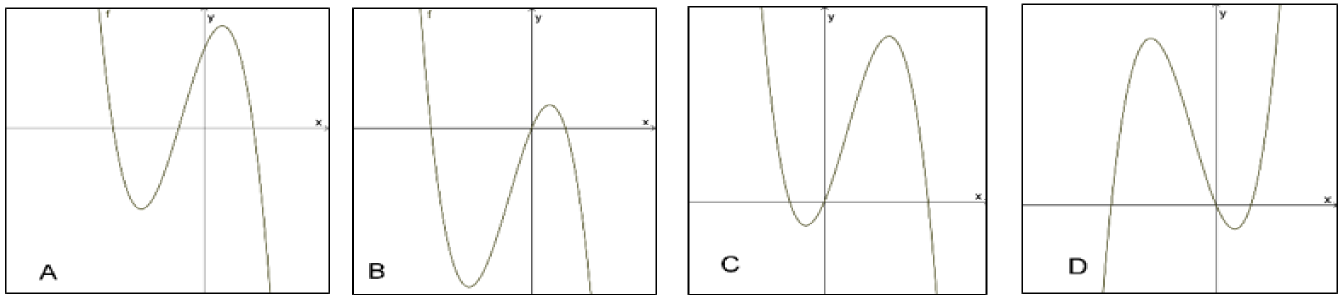
Stundenverlauf

Einstieg:
Einstiegsaufgabe / Themenfindung

Differenzierungsphase
Arbeitsaufträge auf 3 verschiedenen Niveaustufen (A, B, C)

Integrationsphase:
Schülerbeispiele den einzelnen Verfahren zuordnen

Einstiegsfrage: Welches der vier Schaubilder zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x$?



(2) Bei der Funktion g mit $g(x) = x^3 - 4x = x \cdot (x^2 - 4)$ kann man im Funktionsterm x ausklam-
mern

Verfahren zur Nullstellenberechnung

Beispiele	Gleichung / Lösungsverfahren	Nullstellen
1) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x$	$x^3 - 4x^2 - 5x = 0$ $x \cdot (x^2 - 4x^2 - 5) = 0$ • Satz vom Nullprodukt • „Mitternachtsformel“	$x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 5$
2) $f(x) = x^3 - 4x - 5$	$x^3 - 4x^2 - 5 = 0$ • Ausklammern nicht möglich! → Satz vom Nullprodukt kann nicht angewendet werden	nur Näherungslösung mit GTR $x_1 \approx 4{,}27$

Typ: Erstellen eines mathematischen Produktes

- Der Gestaltungsspielraum wird individuell ausgefüllt.
- Das Niveau wird dem eigenen Können angepasst.
- Die Produkte dienen …
  - ... als Übungsmaterial.
  - ... zur Darstellung eines Sachverhaltes für andere.
  - ... als eigene Ergebnissicherung.

Typ „Erstellen eines Produkts“

1. Eine angereicherte **Schulbuch-Übungsaufgabe** zu einem vorgegebenen Aufgabentyp selbst erstellen

○ **5** Ein idealer Würfel wird geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man bei
a) zehn Würfen genau zwei Sechsen wirft,
b) zehn Würfen genau vier Sechsen wirft,
c) acht Würfen keine Sechs wirft,
d) acht Würfen genau vier Sechsen wirft,
e) zwanzig Würfen genau vier Sechsen wirft,
f) zwanzig Würfen keine Sechs wirft.

○ **6** Das nebenstehende Glücksrad wird viermal gedreht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) genau einmal „blau“ erscheint,
b) genau zweimal „blau“ erscheint,
c) genau zweimal „gelb“ erscheint,
d) nie „blau“ erscheint,
e) genau zweimal „rot“ erscheint?

a) Entwirf wie in Nr. 5 oder 6[1] eine eigene Aufgabe mit mehreren unterschiedlich schweren Teilaufgaben.
b) Gib auf einem anderen Blatt die Lösungen an.
c) Erstelle eine Musterlösung mit erläuternden Texten.

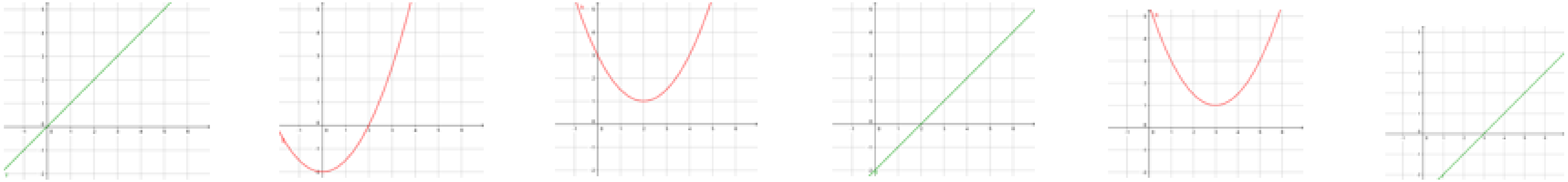
[1] Lambacher Schweizer 10, 2016, Klett, Stuttgart

Typ „Erstellen eines Produkts“

2. Eine **Zuordnungsaufgabe** erstellen

Ordne richtig zu!
Auf dem Blatt findest du drei rot gezeichnete Funktionsgraphen und drei dazugehörige grüne Ableitungsgraphen.

Autor: Fabian
Kontrolle: Livia

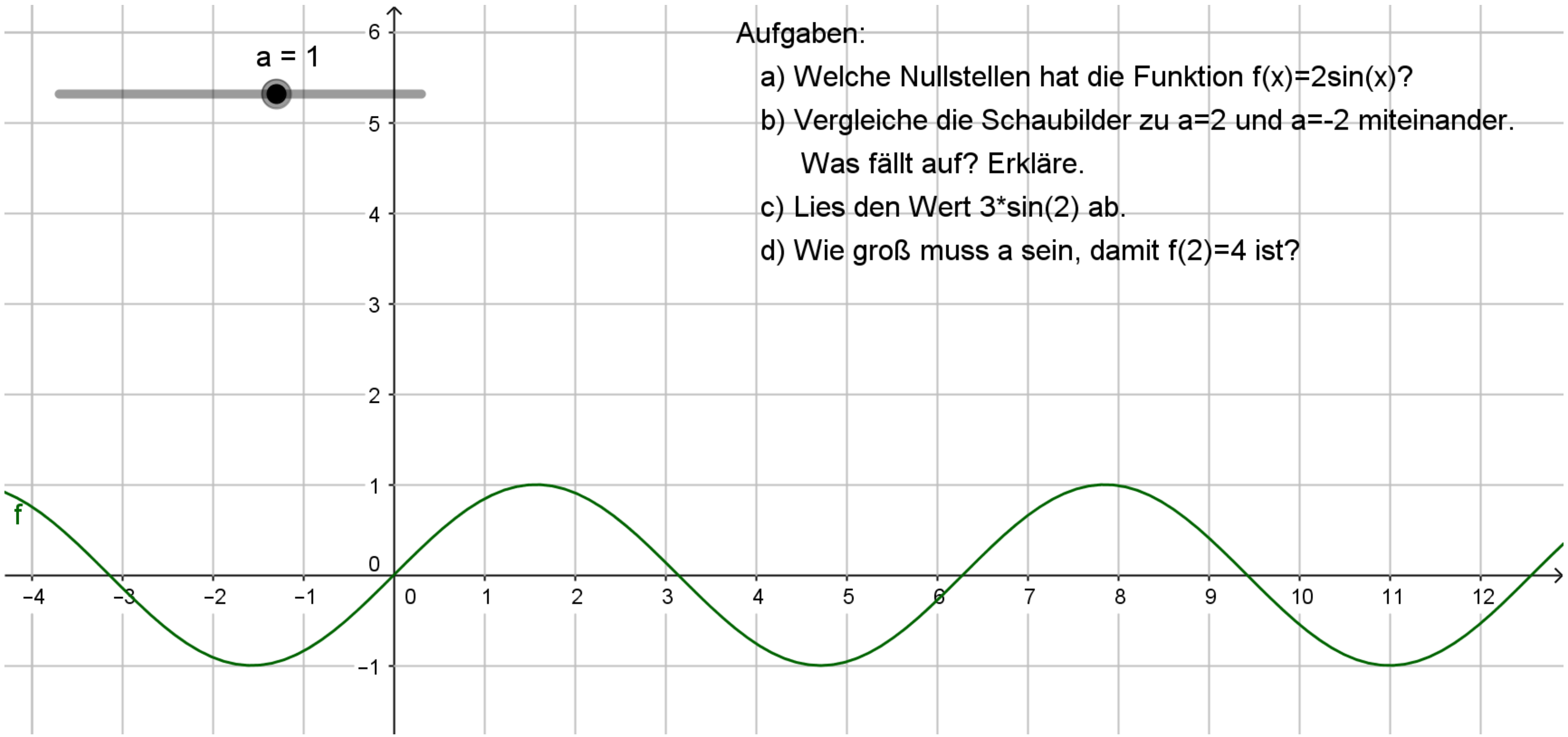


Typ „Erstellen eines Produkts“

3. Eine **Erklär-Sequenz** gestalten

Aufgabestellung:
Erläutere schrittweise, wie man bei einem gegebenen Schaubild die **Steigung eines Funktionsgraphen** in einem Punkt grafisch bestimmt kann.

4. Ein Medienprodukt erstellen



[1] Lambacher Schweizer 10, 2016, Klett, Stuttgart

Typ „Zwei Wege Konzept“ zur Erarbeitung neuer Sachverhalte

Initialaufgabe

Gruppe 1: vom Lehrer gelenkt

- Lösung der Initialaufgabe
- Ggf. Verallgemeinerung (Begriffsbildung; Verfahren; Satz)
- Lehrerfragen zur Kontrolle und Vertiefung

Gruppe 2: weitgehend selbstständig;

- Lösung der Initialaufgabe
- Ggf. Verallgemeinerung (Begriffsbildung; Verfahren; Satz)
- Zusatzfragen zur Vertiefung; Vernetzung mit bereits bekannten Sachverhalten

Übungsphase

Individuelles Bearbeiten von Übungsaufgaben; selbstständiger Lösungsvergleich

- Schwerpunkt Basisstufe
- Übungsaufgaben: Schwerpunkt Additum

Integrationsphase

Besprechung aufgetretener Schwierigkeiten;
Rückblick und Ausblick

Typ „Zwei Wege Konzept“ zur Erarbeitung neuer Sachverhalte

Beispiel: Erarbeitung der Vektorgleichung einer Geraden

Initialaufgabe

Ein Boot fährt geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit. Es befindet sich um 12:00 Uhr im Punkt $P(3|5)$, eine Stunde später im Punkt $P_1(5|4)$.

Wo befindet sich das Schiff a) 2 Stunden
b) 3,5 Stunden
c) -1 Stunde
d) t Stunden nach 12.00 Uhr?

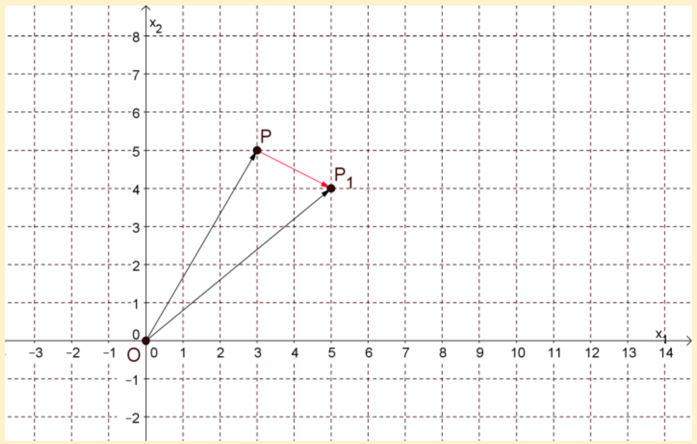
Typ „Zwei Wege Konzept“ zur Erarbeitung neuer Sachverhalte

Beispiel: Erarbeitung der Vektorgleichung einer Geraden - Initialaufgabe

Ein Boot fährt geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit. Es befindet sich um 12:00 Uhr im Punkt P(3|5), eine Stunde später im Punkt P_1(5|4).

Wo befindet sich das Schiff a) 2 Stunden
b) 3,5 Stunden
c) -1 Stunde
d) t Stunden nach 12.00 Uhr?

- Zeichne.



- Fülle Tabelle aus

Uhrzeit:	Anzahl der Stunden nach 12:00 Uhr:	Linearkombination:	Ortsvektor der Position
12:00 Uhr	0	$\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$	P $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$
13:00 Uhr	1	$\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$	P_1
14:00 Uhr	2		P_2
15:30 Uhr			
11:00 Uhr			
	t		

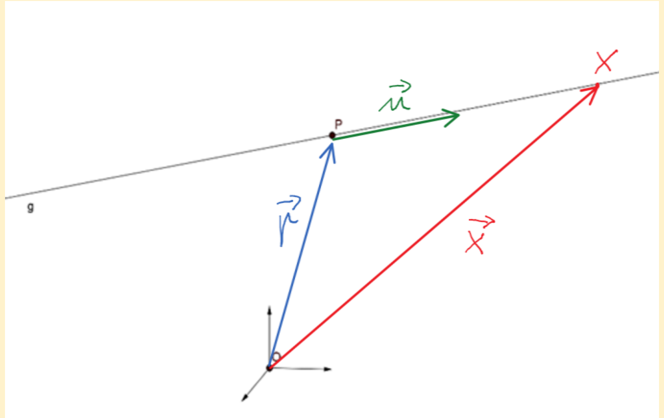
Typ „Zwei Wege Konzept“ zur Erarbeitung neuer Sachverhalte

Beispiel: Erarbeitung der Vektorgleichung einer Geraden

INFO: $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \ (t \in \mathbb{R})$

Parametergleichung einer Geraden g mit

Stützvektor $\overrightarrow{p}$ und Richtungsvektor $\vec{u}$



- Veranschaulichung der Vektoren $\vec{p}, \overrightarrow{u}$ und $\vec{x}$ an einer Skizze

- Vertiefung:
  - Eine Gerade – viele Parametergleichungen
  - Punktprobe

- Vernetzung:
  Geraden in der Ebene – zwei Formen der Geradengleichung

Typ „Zwei Wege Konzept“ zur Erarbeitung neuer Sachverhalte

Beispiel: Erarbeitung der Vektorgleichung einer Geraden

Übungsphase (Schulbuchaufgaben)

Basis

- Von zwei Geradenpunkten zur Geradengleichung
- <u>Umkehrung:</u> Von der Geradengleichung zur Angabe von Geradenpunkten
- Punktproben durchführen

+

Additum

- 3 (4) Punkte auf einer Geraden?
- verschiedene Parametergleichungen – eine Gerade?
- Sonderfall: Spurpunkte von Geraden mit den Koordinatenebenen

Typ „Planarbeit“

Gestaltung differenzierter Arbeitsaufträge – Beispiel: Die Formel von Bernoulli

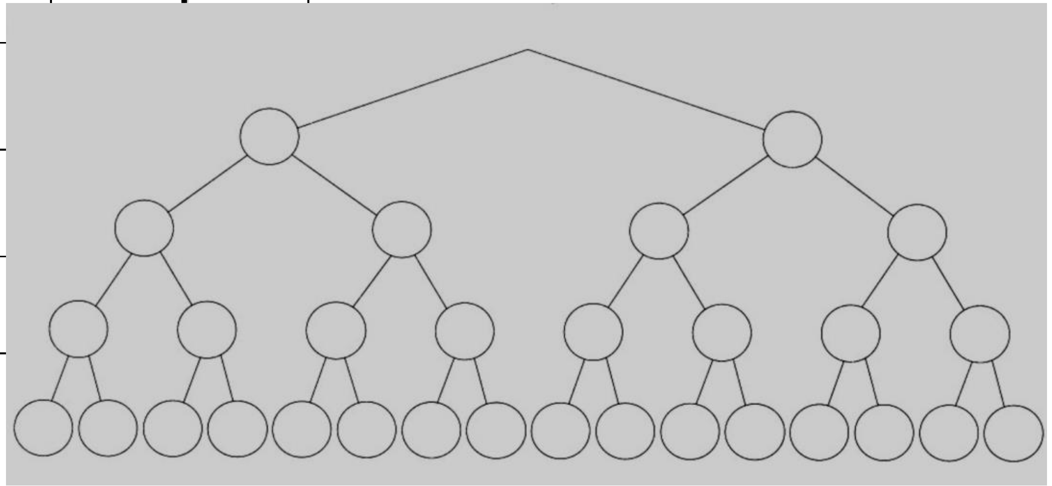
- Niveau A: Planarbeit geführt
- Niveau B: Planarbeit angeleitet
- Niveau C: Planarbeit mit wenig Hilfe

[1] Lambacher Schweizer 10, 2016, Klett, Stuttgart

Typ „Planarbeit“

Idee: Ausgehend von einer geführten Planarbeit entstehen die anspruchsvolleren Varianten durch Weglassen strukturierender Hilfen wie Tabellen, Diagrammen und Lückentexthinweisen, und durch offenere Fragestellungen.

Anzahl der erhaltenen Figuren (r)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Zahl der möglichen Pfade					
Wahrscheinlichkeit eines dieser Pfade					
P(X = r)					



Anzahl der Pfade

Wahrscheinlichkeit für … Erfolge (Treffer)

Wahrscheinlichkeit für … Misserfolge

[1] Lambacher Schweizer 10, 2016, Klett, Stuttgart