

Ganzheitliche Lehrerbildung im Fach Mathematik

von Alfred Böhm

1. Ganzheitliche Sicht der Mathematik auf die Welt

Im Vatikan findet man in den Stanza della Segnatura das berühmte Wandgemälde „Die Schule von Athen“ von Raffael. In einer nach oben offenen Halle, die den Blick auf den Himmel freigibt, stehen oder sitzen die berühmtesten Denker der griechischen Antike.¹ Das Bild stellt sowohl vom geometrischen Aufbau, als auch inhaltlich den Versuch dar, die ganzheitliche Sicht vom Kosmos zur Zeit der



großen griechischen Philosophen zu beschreiben. Als Mittel der Beschreibung dient dazu die Mathematik. Pythagoras, der erste große Mathematiker und Philosoph (was damals gleichbedeutend war), suchte mit seinen Anhängern nach der Harmonie, „die der Welt und den Göttern Halt und Ordnung gibt“.² Die Pythagoreer suchten sie zunächst in den Zahlen („Alles ist Zahl“), danach, nach der Entdeckung inkommensurabler Strecken, in den Verhältnissen von Strecken („Alles ist Verhältnis“). Neben einer Verallgemeinerung bereits bekannter mathematischer Gegebenheiten (Pythagoreer) und dem systematischen Zusammenfassen des damaligen mathematischen Wissens (Euklid), ist die entscheidende Entdeckung der griechischen Mathematiker die Erkenntnis, dass es „große gedankliche Zusammenhänge von unausweichlicher Stringenz – Theorien – überhaupt geben kann“.³

Machen wir einen Sprung in die Gegenwart: Vor einigen Jahren gab es eine Umfrage unter Mathematikern welches die schönste Formel sei. Eindeutiger Sieger wurde $e^{i\pi}+1=0$. Warum? Philosophisch gesehen verbindet sie die reale Welt mit der transzendenten und imaginären. 0 und 1 stehen für die reale Welt, denn alles, was wir mit unseren Sinnen wahrnehmen bzw. im Computer speichern können, lässt sich damit darstellen. Die Eulersche Zahl e tritt bei allen Wachstums- und Zerfallsvorgängen in der Natur auf. Die imaginäre Zahl i und die transzendente Zahl π stehen für den Bereich unserer Welt, zu dem wir keinen direkten Zugang, keine Sensoren haben. Diesen Bereich der Welt können wir nur durch Denken erfassen (man denke an Platons Höhlengleichnis).

Eine Lehrerausbildung in Mathematik sollte diese ganzheitliche Sicht der Mathematik auf die Welt an geeigneter Stelle punktuell aufgreifen und diskutieren.

2. Ganzheitliche Fachdidaktik

Zu einer ganzheitlichen Lehrerbildung gehört, dass möglichst viele Themen der Fachdidaktikveranstaltungen ganzheitlich behandelt werden. Ganzheitlich behandeln heißt, sowohl geschichtliche als auch mathematische und anwendungsbezogene Aspekte aufzugreifen und die Verbindung zu anderen Fächern herzustellen. Von den vielen Möglichkeiten möchte ich eine exemplarisch genauer vorstellen:

Der Goldenen Schnitt

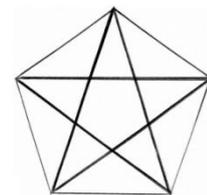
Die Pythagoreer befassten sich intensiv mit dem Problem, eine gegebene Strecke so zu teilen, dass

gilt: $\frac{\text{kurze Strecke}}{\text{lange Strecke}} = \frac{\text{lange Strecke}}{\text{Gesamtstrecke}}$. Sie nannten dieses Verhältnis jedoch nicht

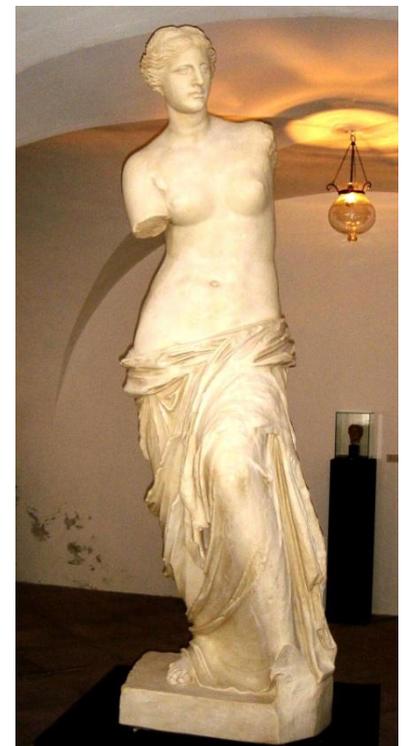
Goldener Schnitt sondern „Stetige Teilung“. Im regelmäßigen Fünfeck ist es mehrfach zu finden, deshalb wählten sie das Pentagramm auch zu ihrem Erkennungszeichen. In ihm fanden sie, wonach sie immer gesucht hatten: ein

vollkommen harmonisches Objekt. Es bildete für sie die Harmonie der Welt

ab, und so wurde der Goldene Schnitt für sie zur Richtschnur des Ebenmaßes. In vielen Bauwerken und Statuen kam er zur Anwendung, war er doch ein Garant für die Schönheit (Harmonie) des Produkts.



Von der Antike über die Renaissance bis heute wurde und wird der Goldene Schnitt von Architekten (Parthenon, Notre Dame, UN-Gebäude,..), Künstlern und Designern (Phidias, Leonardo da Vinci, Raffael, Dürer, Le Corbusier, ..) bei der Gestaltung ihrer Werke zuhelfe genommen.

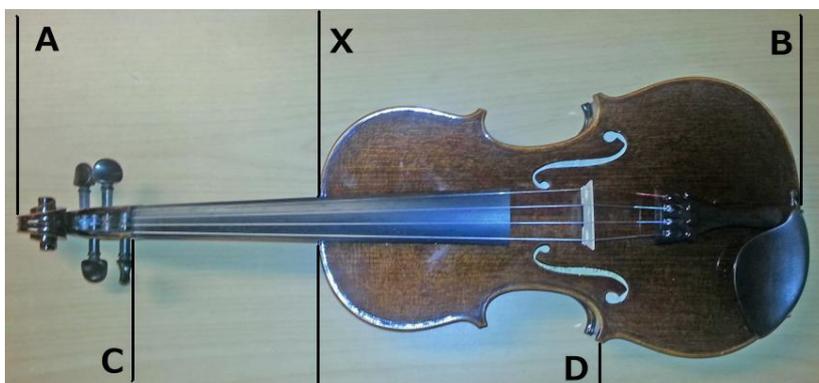


Auch das Parthenon ist vollständig nach dem Goldenen Schnitt aufgebaut.

Die Venus von Milo:
An ihr ist alles im Goldenen Schnitt

In der Natur findet sich der Goldene Schnitt im Verhältnis der Planetenbahnen¹⁴, in den Proportionen vieler Blätter¹³, in der Blattstellung an den Pflanzenstängeln¹⁶, in der Zahl der Blütenblätter, in den Körperproportionen „schöner“ Menschen, in den Spiralen von Sonnenblumen, Tannenzapfen, Ananas sowie des Nautilus.

Sowohl im Geigen- wie auch Flötenbau findet sich der Goldene Schnitt, nach dem auch Stradivari seine Instrumente gebaut hat^{8,12}. Bei den Tonintervallen kommen die Frequenzverhältnisse 1:2:3 und 3:5:8 dem Goldenen Schnitt ziemlich nahe und spielen in der Musik eine große Rolle (Oktave/Quinte bzw. große Sext/kleine Sext). Manche Musikstücke sind so komponiert, dass gewisse Zeitintervalle diesem Prinzip folgen (z.B. Béla Bartok: Sonate für zwei Klaviere



und Schlagzeug oder die Eröffnung zu Beethovens 5. Sinfonie⁹). Da sich die Musik stark formalisieren und exakt beschreiben lässt, wurde sie in der Antike und im Mittelalter der Mathematik zugeordnet¹⁰.

Auch im Alltag finden wir den Goldenen Schnitt: Auf einigen 1-Euro-Münzen erkennt man den Vitruvianischen Menschen, Kreditkarten und Führerscheine sind „Goldene Rechtecke“, und in der Typographie wird er benutzt, um einen harmonischen Satzspiegel zu erhalten. Bereits Gutenberg hatte das Seitenformat seiner lateinischen Bibel B42 nach dem Goldenen Schnitt gewählt.



Vor dem Hintergrund dieser ganzheitlichen Betrachtungsweise eines Themas wurden von Referendarinnen und Referendaren mehrere anregende und substanzielle Lernumgebungen für Schülerinnen



und Schüler geschaffen: Der Goldene Schnitt in Mathematik, Natur, Kunst und Architektur^{4,5,6}. Antworten auf die Fragen die sich aus den oben beschriebenen Aspekten ergeben, können von den Besuchern selbst gefunden werden. Da die Lernenden bei den problemorientierten Aufgabenstellungen immer eigenen Lösungswegen nachgehen und bei Schwierigkeiten abgestufte Tipps zur Lösung in Anspruch nehmen können, liegt der Lehrmethode eine typische *construction view* zugrunde, die nach den Ergebnissen der *Coactiv*-Studie besonders erfolgreiches Lernen ermöglicht¹¹.



Diese Lernumgebungen können ausgeliehen werden⁷ und fanden großes Interesse bei Veranstaltungen der MNU, in Museen und Universitäten, Schulen und bei der IHK im Raum Weingarten – Ulm – Karlsruhe. Sie ermöglichen es Lehrern, auf höchst motivierende Art, ihren Schülern einen ganzheitlichen Überblick über ein Themengebiet zu geben. Die Lernumgebungen bauen auf dem Prinzip des Entdeckenden Lernens und eines individualisierten Unterrichts auf, es wird problem- und handlungsorientiertes sowie selbstgesteuertes Lernen mit schülerbezogener Differenzierung ermöglicht. Multimediale Arbeitsstationen fördern durch Einzel- über Partner- bis zur Gruppenarbeit alle fachrelevanten Kompetenzen.

3. Ganzheitliche Ausbildung

Wie eine ganzheitliche Fachausbildung aussieht, haben wir im vorherigen Abschnitt gesehen. Es gibt darüber hinaus jedoch auch den Aspekt einer ganzheitlichen Persönlichkeitsentwicklung. In der Regel haben die Referendare bevor sie ans Seminar kommen und in den Schuldienst eintreten eher weniger Kontakt mit verhaltensauffälligen Jugendlichen, und stehen manchem Problem ziemlich hilflos gegenüber. Eine Stärkung des Selbstvertrauens, verbunden mit der Gewissheit, auch schwierige Situationen zusammen mit Anderen bewältigen zu können, ist daher von großer Bedeutung. Hier bietet sich das in der Industrie weit verbreitete Teamtraining an, bei dem die Teilnehmer lernen, zur

Lösung von Aufgaben zuerst gemeinsam eine Strategie zu entwickeln, und sie dann getreu dem Motto „Gemeinsam sind wir stark“ anzugehen.

Aus meinen Erfahrungen mit der Ulmer Schüler-Ingenieur-Akademie ist für eine derartige Persönlichkeitsentwicklung ein erlebnispädagogisches Wochenende bestens geeignet. Im Team lernt man dabei auch Situationen zu bewältigen, in denen man allein den Gewalten der Natur ziemlich hilflos ausgeliefert wäre, und in die sich die Teilnehmer als Einzelpersonen meist auch gar nicht hinein begeben würden. Natürlich muss dabei jeder Teilnehmer für sich selbst entscheiden, ob er daran teilnehmen möchte und die Aufgabe des „Erlebnispädagogen“ besteht darin, die Teilnehmer über eventuelle Risiken aufzuklären, sie jedoch auch zu ermutigen, sich zusammen mit den Anderen der Aufgabe zu stellen.

Annette Reiners¹⁵ formuliert folgende Gedanken, die für ein erfolgreiches erlebnispädagogisches Arbeiten wichtig sind: „Da die in der Erlebnispädagogik bereitgestellten Räume außerdem dem Abenteuerdrang des Menschen entsprechen, besitzen sie gleichzeitig Aufforderungscharakter, der verbunden mit Überraschungselementen, Erfolgserlebnissen etc. zur Eigeninitiative und Eigenaktivitäten motiviert. Die Situationen müssen ernsthaft, direkt, konkret und authentisch, das heißt „nicht aufgesetzt“ sein; die an die Gruppe übertragene Verantwortung muss real und nicht spielerisch sein. Die an die Lernenden gestellte Aufgabe oder gesetzte Situation macht ein Handeln notwendig. Es werden alle Sinne angesprochen, im Gegensatz zu theoretischen Lernsituationen. Somit sind nicht nur kognitive, sondern auch die emotionale und aktionale Lernebenen berücksichtigt.“



Die Umsetzung erfolgte in unserem Fall immer so, dass wir am Ende der ersten Ausbildungsphase im Juli ins Ötztal nach Tirol fahren um dort Rafting zu betreiben und erlebnispädagogische Gruppenspiele zu veranstalten. Alle Teilnehmer, insbesondere die zuvor ängstlichen, waren im Nachhinein der

Ansicht, dass es für sie ein großartiges Gruppenerlebnis war, und dass sie die gemachten Erfahrungen nicht missen möchten.



4. Resümee

Am Max-Planck-Institut für Bildungsforschung hat ein Team um Mareike Kunter untersucht, was guten Mathematikunterricht ausmacht¹¹:

„Unsere Befunde weisen ... darauf hin, dass zentrale Aspekte der (Lehrer-) Kompetenz während der formalen Lehrerausbildung erworben werden – allerdings in unterschiedlichem Maße, je nach Art der Ausbildung....So besaßen Gymnasiallehrkräfte höheres Fachwissen – was zu erwarten war, weil in ihrer Ausbildung der Fachanteil am größten ist. Doch auch im fachdidaktischen Wissen hatten Gymnasiallehrer deutliche Vorteile, obwohl darauf in der Ausbildung für andere Schulformen eigentlich mehr Gewicht gelegt wird.“

Als wesentliches Ergebnis dieser Studie stellte sich heraus, dass Schüler mathematische Sachverhalte besser verstehen, wenn der Lehrer ihnen verschiedene Lösungsansätze präsentieren kann. Insofern ist es von besonderer Bedeutung, dass der Lehrer ein tiefes Sachverständnis aufweist, man könnte auch sagen, ganzheitlich ausgebildet ist. Weiterhin ist bekannt, dass Schüler gerade dann besonders gut lernen, wenn sie eine gewisse emotionale Bindung zum Lerngegenstand entwickeln, und dazu kommt es eben auch am ehesten, wenn der Lehrer einen umfassenden Überblick besitzt und die Probleme in Kontexte stellen kann, welche für die Schüler interessant sind. Nach der Hattie-Studie spielt es für den Lernerfolg eine ganz entscheidende Rolle, von wem Lernende unterrichtet werden und ob die betreffende Lehrperson einen guten Unterricht macht oder nicht. Auch diese Studie hebt hervor, welche entscheidende Rolle die Ausbildung der Lehrer für erfolgreichen Unterricht hat, und nach den oben diskutierten Gesichtspunkten wird dies bei einer ganzheitlichen Lehrerbildung am besten erreicht.

Literaturhinweise

- 1) Richard Fichtner: Die verborgene Geometrie in Raffaels „Schule von Athen“; Deutsches Museum
- 2) Marek Kordos: Streifzüge durch die Mathematikgeschichte; Klett
- 3) C.F. v. Weizsäcker: Der Garten des Menschlichen; Fischer
- 4) Franziska Arnold: Der Goldene Schnitt in der Architektur – ein entdeckender und handlungsorientierter Zugang ; Seminar Weingarten Kurs 2003G
- 5) Nicola Beck: Der Goldene Schnitt am Kreis und in der Natur - ein entdeckender und handlungsorientierter Zugang ; Seminar Weingarten Kurs 2003G
- 6) Ines Brannath: Der Goldene Schnitt in der Kunst - ein entdeckender und handlungsorientierter Zugang ; Seminar Weingarten Kurs 2003G
- 7) <http://www.f-m-b-j.de>
- 8) Karl-Heinz Kreiner: Was hat das Lottospiel mit dem Bau einer Stadivari zu tun?; MNU 65/4 2012
- 9) Derek Haylock: The Golden Section in Beethoven's Fifth; Mathematics Teaching Vol. 84 1978
- 10) <http://www.math.uni-magdeburg.de/reports/2002/musik.pdf>
- 11) Stefanie Hense: Regeln für die Rechenlehre; MaxPlankForschung 2/2008
- 12) <http://www.michael-holzapfel.de/themen/goldenerschnitt/gs-geige/geige.htm>
- 13) Otto Hagenmaier „Der Goldene Schnitt“; Heinz Moos Verlag München
- 14) Eberhard Oettinger: Kaleidoskop; Klett Verlag
- 15) Annette Reiners: Praktische Erlebnispädagogik; Ziel-Verlag 2005
- 16) Mario Livio: The Golden Ratio; Broadway Books New York